PARAGRAAF 2.1 TOENAMEDIAGRAM

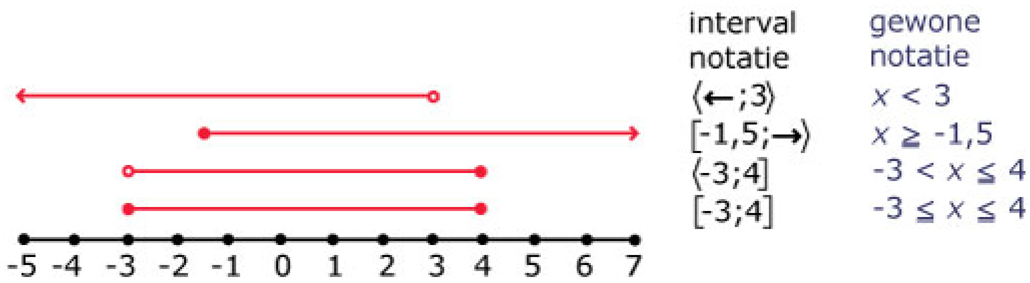
LES 1 INTERVAL / GETALLENLIJN / X-NOTATIE

VOORBEELD 1

Geef op drie manieren (getallenlijn, intervalnotatie en x-notatie) de volgende 4 intervallen weer :

a. x is kleiner dan 3
b. x is groter of gelijk aan -1,5
c. x is groter dan -3 en kleiner of gelijk aan 4
d. x is groter of gelijk aan -3 en kleiner of gelijk aan 4

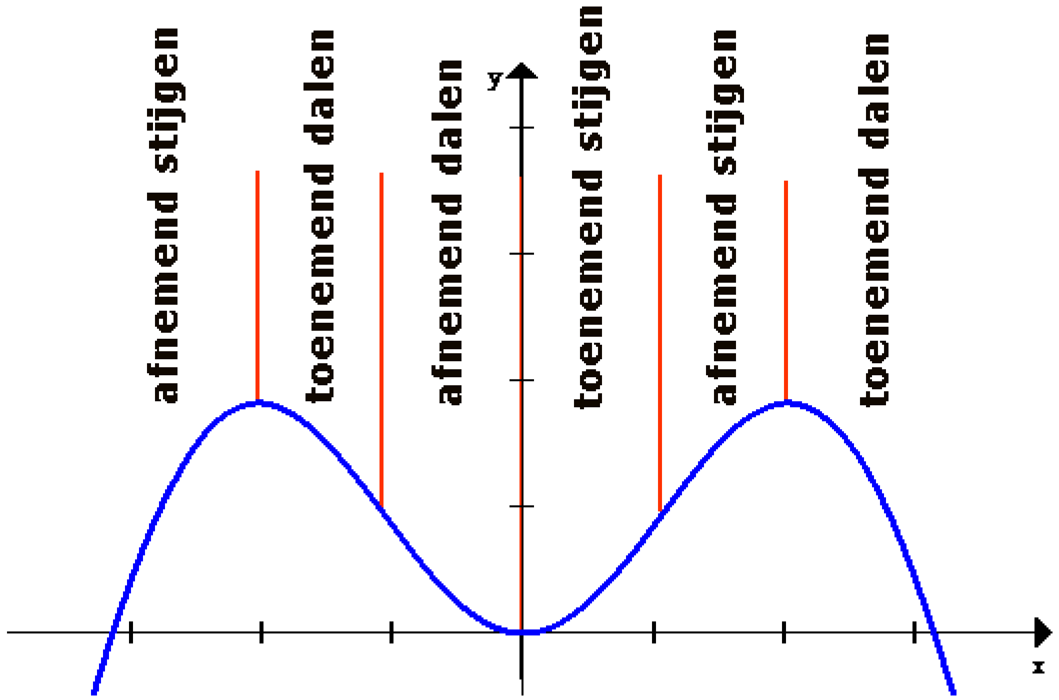
OPLOSSING 1



VOORBEELD 2

Gegeven is onderstaande grafiek. Geef duidelijk aan op welk gebied de grafiek :
Toenemend stijgend
Afnemend stijgend
Toenemend dalend
Afnemend dalend is.

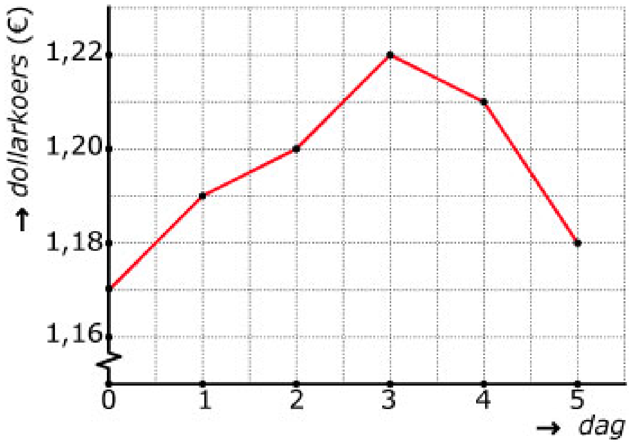
OPLOSSING 2



LES 2 TOENAMENDIAGRAM TEKENEN

VOORBEELD 1

Hier zie je de grafiek van het verloop van de koers van de dollar. Maak er een toenamediagram bij met stapgrootte 1 dag. Geef de prijs in centen nauwkeurig.

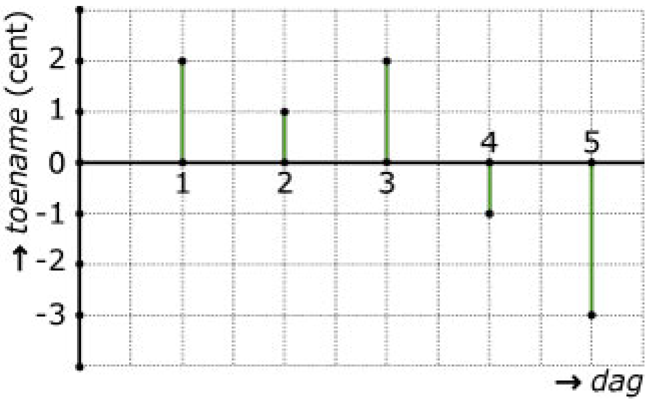


OPLOSSING 1

Maak eerst een tabel met de toenames

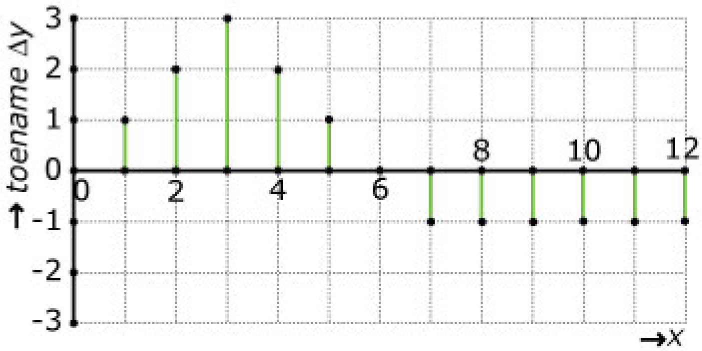
dag	0	1	2	3	4	5
Koers (centen)	117	119	120	122	121	118
toename Δ Koers		2	1	2	-1	-3

Dit geeft het toenamediagram :



LES 3 GRAFIEK MAKEN UIT EEN TOENAMENDIAGRAM

VOORBEELD 1



Hier zie je het toenamediagram van de grafiek van een functie waarvan de grafiek door (4,7) gaat.

a. Maak nu een grafiek van deze functie.

b. Geef het grootste interval aan waar de grafiek afnemend stijgend is.

OPLOSSING 1

a. Maak eerst een tabel met alle bekende gegevens :

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Δy		1	2	3	2	1	0	-1	-1	-1	-1	-1	-1
y					7								

Vul alles in en je krijgt :

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Δy		1	2	3	2	1	0	-1	-1	-1	-1	-1	-1
y	4	5	7	10	7	5	4	3	2	1	0	”1	”2

b. Van 3 naar 6 wordt de helling steeds minder positief (tot x=6, want daar is hij nul en niet meer stijgend).
Dus < 3 , 6 > .

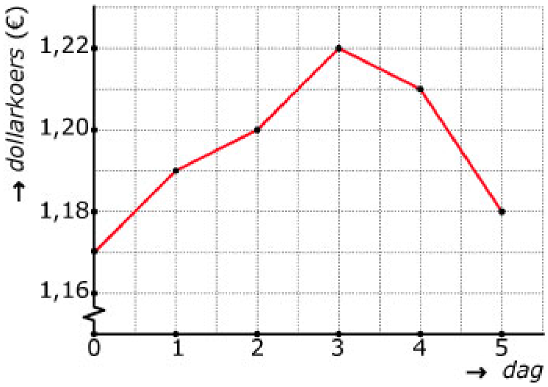
PARAGRAAF 2.2 DIFFERENTIEQUOTIËNTEN

DEFINITIE DIFFERENTIEQUOTIËNT

- Differentiequotiënt = { Gemiddelde helling / toename / snelheid }
- Differentiequotiënt op interval [a,b] = $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{y(b) - y(a)}{b - a}$

VOORBEELD 1

Gegeven is de grafiek :



a. Bereken het differentiequotiënt op $[1{,}4]$ in centen nauwkeurig

Gegeven is de functie $f(x) = x^2 + 3$.

b. Bereken het differentiequotiënt op $[2{,}6]$

c. Bereken de gemiddelde helling / snelheid op $[-4, -1]$

OPLOSSING 1

a. $x = 1 \rightarrow y = 119$ cent
$x = 4 \rightarrow y = 121$ cent

Differentiequotiënt op interval [1,4] = $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{121 - 119}{4 - 1} = \dfrac{2}{3}$

b. $x = 2 \rightarrow y = 7$
$x = 6 \rightarrow y = 39$

Differentiequotiënt op interval [2,6] = $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{39 - 7}{6 - 2} = \dfrac{32}{4} = 8$

c. $x = -4 \rightarrow y = 19$ en $x = -1 \rightarrow y = 4$

Gemiddelde helling / snelheid op [-4,-1] = $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{4 - 19}{-1 - -4} = \dfrac{-15}{3} = -5$

OPMERKING

Differentiequotiënt is eigenlijk de r.c. van die lijn.

VOORBEELD 2

Gegeven is de functie $f(x) = x^2 + 3$.

Bereken de helling in $x = 2$

OPLOSSING 2

Een goede benadering is om een heel klein interval rond x = 2 te nemen en het differentiequotiënt uit te rekenen dus bijvoorbeeld op interval [2 ; 2,01] (Δx=0,01) :

(1) Bereken bij beide x-en de y-waarden :

$x = 2 \rightarrow y = 2^2 + 3 = 7$ dus $A = (2{,}7)$

$x = 2{,}01 \rightarrow y = 2{,}01^2 + 3 = 7{,}0401$ dus $B = (2{,}01\,;\,7{,}0401)$

(2) Differentiequotiënt op interval $[2\,;\,2{,}01] =$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_{2,01} - y_2}{x_{2,01} - x_2} = \frac{7{,}0401 - 7}{0{,}01} = \frac{0{,}0401}{0{,}01} = 4{,}01 \approx 4$$

(3) Dus de helling in $x = 2$ is 4.

OPMERKING

- Soms moet je eerst een raaklijn tekenen. Pak twee punten van deze raaklijn en bereken daarmee de helling (in dat punt).
- Als $\frac{\Delta y}{\Delta x} > 0$ is de formule stijgend. Is $\frac{\Delta y}{\Delta x} < 0$ dan is de formule dalend.

PARAGRAAF 2.3 : SNELHEDEN EN RAAKLIJNEN

LES 1 : RAAKLIJN OPSTELLEN

STAPPENPLAN RAAKLIJN BIJ X = … :

(1) Algemene vergelijking van een lijn (en dus ook van een raaklijn) → $y = ax + b$

(2) Bereken de y-coördinaat.

(3) Bereken de a = rc met knop dy/dx op GR.

(4) Bereken b door x, y en a in te vullen bij $y = ax + b$.

(5) Geef de vergelijking van de raaklijn.

VOORBEELD 1

Gegeven is de functie $f(x) = 2x^2 - 3x + 10$. Bepaal de raaklijn in x=3

OPLOSSING 1

(1) Algemene vergelijking raaklijn → $y = ax + b$

(2) $y = f(3) = 19$

(3) $Y1 = 2x^2 - 3x + 10$

Calc → $\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} \rightarrow 3 \rightarrow a = 9$

(4) Je weet $y = 9x + b$

Je weet ook $(3{,}19)$ invullen :

$19 = 9 \cdot 3 + b$

$b = -8$

(5) Dus raaklijn : $y = 9x - 8$.

PARAGRAAF 2.4 : RAAKLIJNEN EN HELLINGGRAFIEKEN

LES 1 : VERBAND TUSSEN F(X) EN F ’(X)

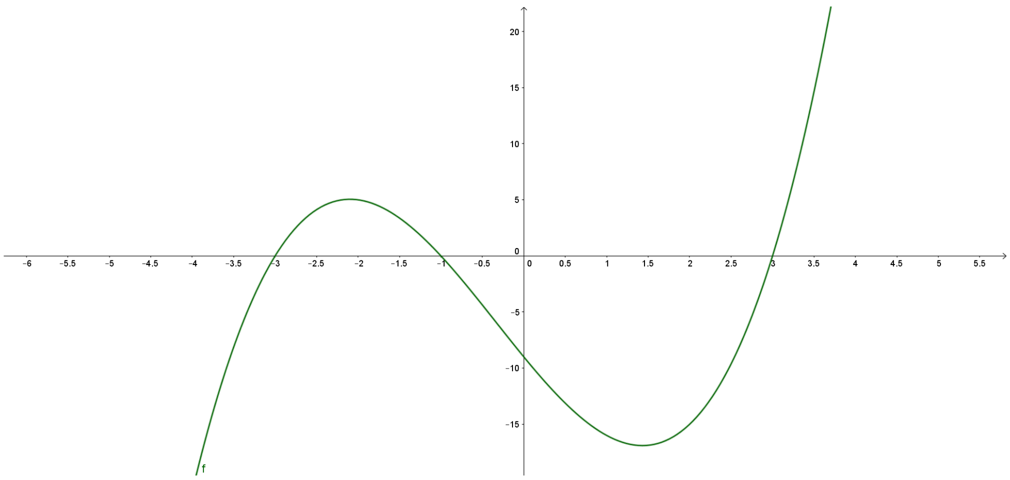
DEFINITIES

- f’(x) = { de hellinggrafiek van f(x) }

VOORBEELD 1

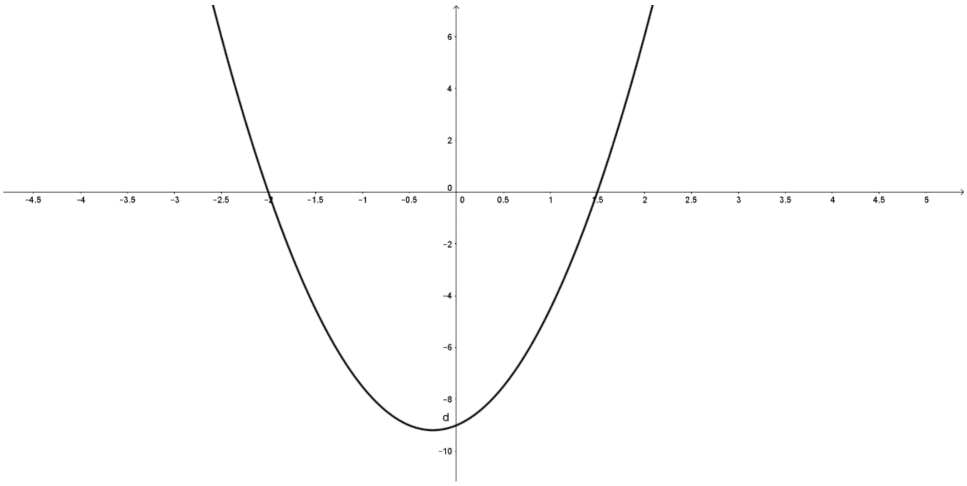
Gegeven is de grafiek hierbeneden.

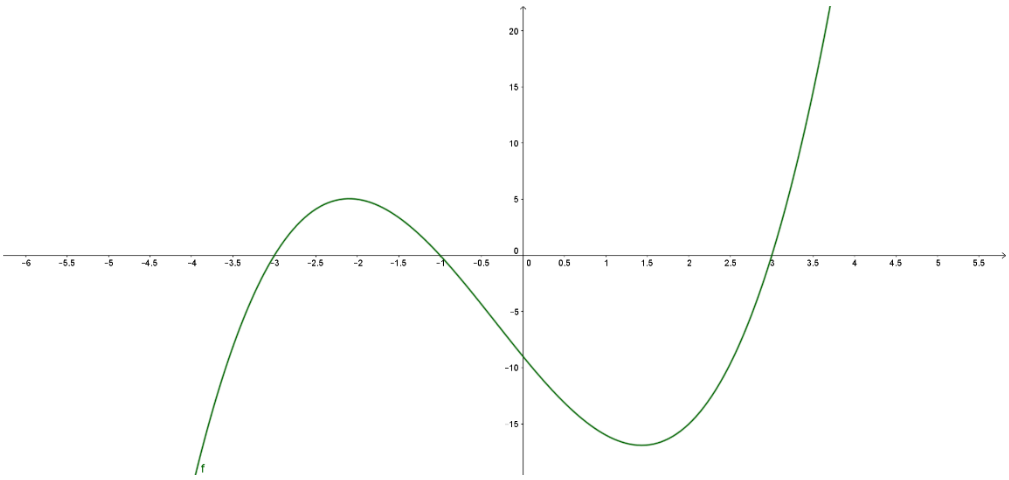
a. Stel dat is de grafiek van f(x). Teken op basis hiervan f’(x)
b. Stel dat is de grafiek van g’(x). Teken op basis hiervan g(x)



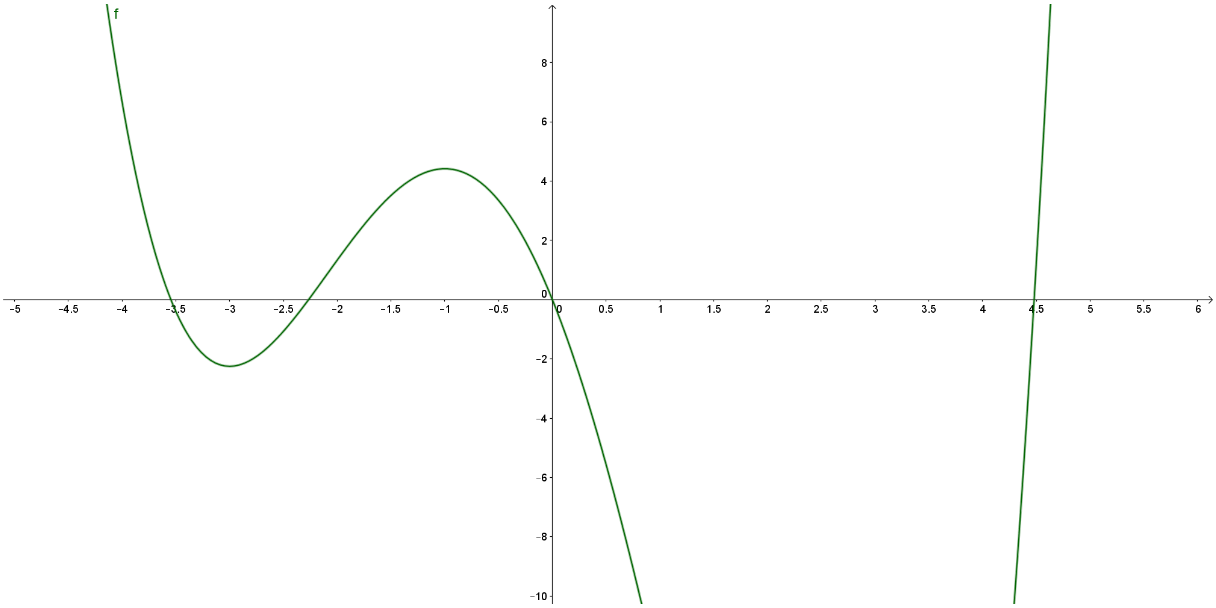
OPLOSSING 1

a. **(1)** In de toppen is f'(x) = 0. Dus bij x = -2 en x = 1,5.
(2) Links van x = -2 is de grafiek stijgend. Dus f'(x) is positief
(3) Rechts van x = 1,5 is de grafiek stijgend. Dus f'(x) is positief
(4) Tussen x = -2 en x = 1,5 is de grafiek dalend. Dus f'(x) is negatief.
Dit geeft :





b. **(1)** Waar g'(x) = 0 zijn bij g(x) toppen. Dus bij x = -3, x = -1 en x = 3.
(2) Links van x = -3 en tussen -1 en 3 is g'(x) is negatief. Dus is de grafiek daar dalend.
(3) Rechts van x = 3 en tussen -3 en -1 is g'(x) is positief. Dus is de grafiek daar stijgend.
Dit geeft :



LES 2 : DIFFERENTIËREN

Als je iedere keer de helling moet bepalen op deze manier, dan is dat erg veel werk. Dit is al door iemand gedaan. Deze techniek heet differentiëren.

DEFINITIES

- Differentiëren = { Hellingfunctie berekenen }
- Afgeleide bepalen = { Hellingfunctie berekenen }

DIFFERENTIEERREGELS

(1) Hoofdregel differentiëren :	$f(x) = a \cdot x^n \rightarrow f'(x) = a \cdot n \cdot x^{n-1}$
(2) Hulpregel 1 :	$f(x) = a \cdot x \rightarrow f'(x) = a$
(3) Hulpregel 2 :	$f(x) = a \quad \rightarrow f'(x) = 0$

VOORBEELD 1

Differentieer

a. $f(x) = 6x^4$

b. $f(x) = 4x + 7$

c. $f(x) = 3x^5 - 7x^3 + 6x - 3$

d. $f(x) = (3x - 7x^2)(6x + 2)$

e. $f(x) = ax^2 + 3x + 2a$

OPLOSSING 1

Differentieer

a. $f'(x) = 4 \cdot 6 \cdot x^{4-1} = 24x^3$

b. $f'(x) = 4 + 0 = 4$

c. $f'(x) = 15x^4 - 21x^2 + 6$

d. $f(x) = (3x - 7x^2)(6x + 2) = 18x^2 + 6x - 42x^3 - 14x^2$

$f(x) = -42x^3 + 4x^2 + 6x$

$f'(x) = -126x^2 + 8x + 6$

e. $f'(x) = a \bullet 2x + 3 + 0 = 2ax + 3$

VOORBEELD 2

Gegeven is de functie $f(x) = 9x^2 + 36x$.

a. Bereken algebraïsch de helling in $x = 3$.

b. Bereken algebraïsch de coördinaat waar de helling gelijk is aan -9.

c. Bereken algebraïsch de raaklijn in $x = 2$.

d. Bereken algebraïsch de coördinaten van de top.

OPLOSSING 2

a. $f'(x) = 18x + 36$
Helling in x=3 is : $f'(3) = 18 \cdot 3 + 36 = 90$

b. $f'(x) = -9$ dus $18x + 36 = -9$
$18x = -45$
$x = -2½$

$y = f(-2½\ ) = 9(-2½)2 + 36(-2½) = -33\frac{3}{4}$
Coördinaat $A = (-2½\,, -33\frac{3}{4})$

c. Neem het stappenplan erbij. Alleen stap 3 kan nu sneller :

(1) Algemene vergelijking raaklijn → $y = ax + b$

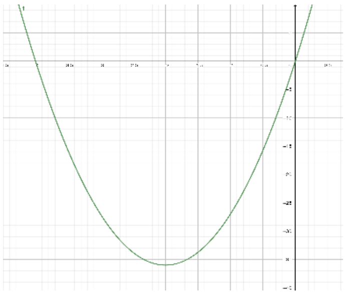
(2) $y = f(2) = 108$

(3) $f'(x) = 18x + 36$
$a = f'(2) = 72$

(4) Je weet $y = 72x + b$.
Invullen van $(2{,}108)$ geeft :
$108 = 72 \cdot 2 + b$
$b = -36$

(5) Dus raaklijn : $y = 72x - 36$

d. In de top geldt : HELLING = 0 → $f'(x) = 0$



$f'(x) = 18x + 36 = 0$
$18x = -36$
$x = -2$
$y = f(-2) = -36.$

Dus de top is $(-2, -36)$
Dit is een minimum (dalparabool)